Université A. Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques et Informatique

Année : 2008/2009
Analyse 2 : SMA

Contrôle continu N⁰ 1

(Durée : 1h 30 mn)

Les réponses doivent être concises et précises.

Exercice 1. (7 points)

1) Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, que

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

2) Calculer la limite de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

3) On considère la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right). \sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

(i) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \sin\left(\frac{k}{n}\right) \leq n^4.$$

(ii) En utilisant **1)** et **3) (i)**, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad u_n - \frac{1}{6n^2} \leq v_n \leq u_n.$$

(iii) En déduire de **2)** et **3) (ii)**, que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2. (3 points) En utilisant la première formule de la moyenne, déterminer la limite suivante

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt.$$

Exercice 3. (10 points) Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \int_1^x \frac{\log t}{1+t^2} dt.$$



1) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

2) Quel est le signe de F sur $\mathbb{R}_+^*$?

3) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de $F'(x)$.

4) Soit $x > 0$. Exprimer $F(\frac{1}{x})$ en fonction de $F(x)$.

5) Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\text{Arctg}\, t}{t} dt$ converge.

6) **(i)** Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, que

$$F(x) = (\log x)\,(\text{Arctg}\, x) - \int_1^x \frac{\text{Arctg}\, t}{t} dt.$$

(ii) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0.

7) **(i)** Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{1+t^2} dt$ converge.

(ii) En déduire de **6) (ii)** et **7) (i)**, que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{1+t^2} dt$ converge.




ETUSUP.com